

Continuidad

V.M. Jiménez

Universidad de Alcalá (UAH)

Continuidad

Definición

Sea $f : V \rightarrow V'$ una función entre espacios euclídeos y $a \in V$. Se dice que f es **continua en a** si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

f es continua si lo es en todos los puntos.

Continuidad

Definición

Sea $f : V \rightarrow V'$ una función entre espacios euclídeos y $a \in V$. Se dice que f es **continua en a** si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

f es continua si lo es en todos los puntos.

¿Cómo escribiría esta definición escribiendo en función de las definiciones de límite de Cauchy y Heine?

Continuidad

Definición

Sea $f : V \rightarrow V'$ una función entre espacios euclídeos y $a \in V$. f es **discontinua** en a si no es continua en a .

Ejercicio:

Estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{x^2 - 1}$$

Continuidad

Definición

La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua por la izquierda de a si

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

Continuidad

Definición

La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua por la derecha de a si

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

Tipos de discontinuidades

- **Discontinuidad evitable:**

Existe

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

- **Inevitable:** Cualquier otro caso.

Continuidad

Propiedades

Sean f y g dos funciones continuas, se tiene que:

- kf es continua para todo escalar k .

Continuidad

Propiedades

Sean f y g dos funciones continuas, se tiene que:

- kf es continua para todo escalar k .
- $f \pm g$ es continua.

Continuidad

Propiedades

Sean f y g dos funciones continuas, se tiene que:

- kf es continua para todo escalar k .
- $f \pm g$ es continua.
- fg es continua.

Continuidad

Propiedades

Sean f y g dos funciones continuas, se tiene que:

- kf es continua para todo escalar k .
- $f \pm g$ es continua.
- fg es continua.
- $\frac{f}{g}$ es continua en los puntos en los que g no es 0.

Continuidad

Propiedades

Sean f y g dos funciones continuas, se tiene que:

- kf es continua para todo escalar k .
- $f \pm g$ es continua.
- fg es continua.
- $\frac{f}{g}$ es continua en los puntos en los que g no es 0.
- $f \circ g$ es continua.

Continuidad

Funciones elementales

Las siguientes funciones son continuas en todos los puntos de sus dominios:

- a^x con $a > 0$ continuas en todos los puntos de $\mathbb{R}$.

Continuidad

Funciones elementales

Las siguientes funciones son continuas en todos los puntos de sus dominios:

- a^x con $a > 0$ continuas en todos los puntos de $\mathbb{R}$.
- $\log_a(x)$ con $a > 0$ y $a \neq 1$ es continua en $(0, \infty)$.

Continuidad

Funciones elementales

Las siguientes funciones son continuas en todos los puntos de sus dominios:

- a^x con $a > 0$ continuas en todos los puntos de $\mathbb{R}$.
- $\log_a(x)$ con $u > 0$ y $u \neq 1$ es continua en $(0, \infty)$.
- x^a es continua en $(0, \infty)$.

Continuidad

Funciones elementales

Las siguientes funciones son continuas en todos los puntos de sus dominios:

- a^x con $a > 0$ continuas en todos los puntos de $\mathbb{R}$.
- $\log_a(x)$ con $u > 0$ y $u \neq 1$ es continua en $(0, \infty)$.
- x^a es continua en $(0, \infty)$.
- x^x es continua en $(0, \infty)$.

Continuidad

Funciones elementales

Las siguientes funciones son continuas en todos los puntos de sus dominios:

- a^x con $a > 0$ continuas en todos los puntos de $\mathbb{R}$.
- $\log_a(x)$ con $u > 0$ y $u \neq 1$ es continua en $(0, \infty)$.
- x^a es continua en $(0, \infty)$.
- x^x es continua en $(0, \infty)$.
- $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ es continua en todo $\mathbb{R}$.
- $\frac{P(x)}{Q(x)}$, con $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios, es continua en todo punto que no anule $Q(x)$.

Continuidad

Funciones elementales

Las siguientes funciones son continuas en todos los puntos de sus dominios:

- a^x con $a > 0$ continuas en todos los puntos de $\mathbb{R}$.
- $\log_a(x)$ con $u > 0$ y $u \neq 1$ es continua en $(0, \infty)$.
- x^a es continua en $(0, \infty)$.
- x^x es continua en $(0, \infty)$.
- $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ es continua en todo $\mathbb{R}$.
- $\frac{P(x)}{Q(x)}$, con $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios, es continua en todo punto que no anule $Q(x)$.
- Las funciones $\text{sen}(x)$ y $\text{cos}(x)$ son continuas en todo $\mathbb{R}$.

Continuidad

Funciones elementales

Las siguientes funciones son continuas en todos los puntos de sus dominios:

- a^x con $a > 0$ continuas en todos los puntos de $\mathbb{R}$.
- $\log_a(x)$ con $u > 0$ y $u \neq 1$ es continua en $(0, \infty)$.
- x^a es continua en $(0, \infty)$.
- x^x es continua en $(0, \infty)$.
- $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ es continua en todo $\mathbb{R}$.
- $\frac{P(x)}{Q(x)}$, con $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios, es continua en todo punto que no anule $Q(x)$.
- Las funciones $\text{sen}(x)$ y $\text{cos}(x)$ son continuas en todo $\mathbb{R}$.
- la función tangente $\text{tg}(x)$ es continua en todo $x \neq (2k+1) \frac{\pi}{2}$ para $k \in \mathbb{Z}$.

Continuidad

Algunos resultados

Teorema de Bolzano

Sea f una función continua en un intervalo $[a, b]$ tal que $\text{signo}(f(a)) \neq \text{signo}(f(b))$. Entonces, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f(c) = 0.$$

Continuidad

Algunos resultados

Teorema del valor medio

Sea f una función continua en un intervalo $[a, b]$ y $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(a) < k < f(b)$$

Entonces, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f(c) = k.$$

Continuidad

Algunos resultados

Teorema de Weierstrass

Sea f una función continua en un intervalo $[a, b]$ entonces alcanza un mínimo y un máximo en el intervalo, i.e., existen $x_1, x_2 \in [a, b]$ tal que

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \quad \forall x \in [a, b].$$